第十一届全国周培源大学生力学竞赛
（个人赛）试题

出题学校：**湖南大学**

（本试卷分为基础题和提高题两部分　满分 120 分　时间 3 小时 30 分）

说明：个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等奖评选标准是：提高题得分进入全国前 5%，并且总得分排在全国前列，根据总得分名次最终确定获奖人。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定获奖人。

注意：试题请全部在答题纸上作答，否则作答无效。各题所得结果用分数或小数表示均可。

第一部分 基础题部分（填空题，共60分）

第 1 题（6 分）

图 1 所示正方体边长为 c，其上作用四个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$，其中各力大小之间的关系为 $F_1=F_2=F_a$，$F_3=F_4=F_b$。

(1)、（2 分）此力系对 OA 轴之矩的大小为（____________________________）；

(2)、（2 分）若此力系可简化为一个力，则 F_a 与 F_b 的关系为（_________________________）；

(3)、（2 分）若 $F_a=F_b=F$，此力系简化为一力螺旋，则其中的力偶矩大小为(__________________)。

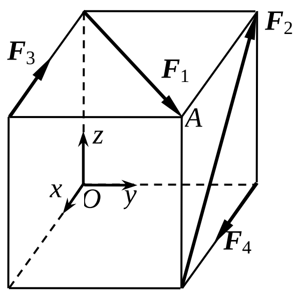


图 1

第 2 题（6 分）

两匀质圆轮 A 和 B 的质量同为 m，半径同为 r。如图 2 所示，轮 A 沿着水平面运动，绕于轮 B 的细绳通过定滑轮 C 后与轮 A 的中心相连，其中 CA 段绳水平，CB 段绳铅直。不计定滑轮 C 与细绳的

质量，且细绳不可伸长。系统处于铅垂平面内，自静止释放。

(1)、（2 分）若轮 A 既滚又滑，则系统的自由度为（__________________）；

(2)、（4 分）若轮 A 与水平支承面光滑接触，则轮 B 下落的高度与时间的关系为

（____）。

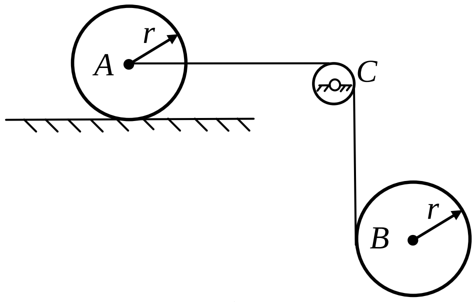


图 2

第 3 题（6 分）

桁架的杆件内力可以应用节点法、截面法以及虚位移原理进行求解。图 3 所示静定桁架由水平杆、竖直杆和 45°斜杆组成。在 B 处受固定铰支座约束，A、C 两处由可水平运动的铰支座支承。桁架上作用了三个大小同为 F 的载荷。则

(1)、（2 分）杆 DH 的内力为（____）；

(2)、（4 分）杆 BE 的内力为（____）。

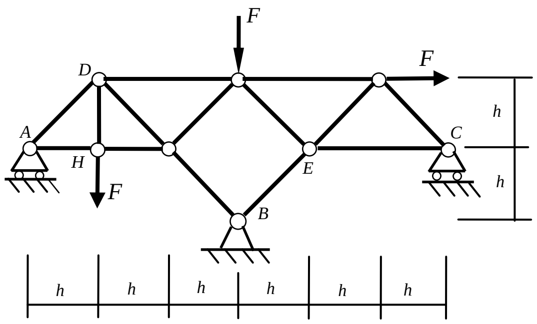


图 3

第 4 题（6 分）

如图 4 所示，小车上斜靠了长为 L，质量为 m 的均质杆 AB，倾角以 θ 表示。杆处于铅垂平面内，其 B 端与小车壁光滑接触，A 端与小车底板的摩擦角为 $\varphi_m = 30°$。小车由动力装置驱动（图中未画出），沿水平直线向左运动，且其运动可以被控制。小车运动过程中，杆 AB 相对于小车始终保持静止。

(1)、（3 分）若小车作匀速运动，则倾角 θ 要满足的条件为(______________________________)；

(2)、（3 分）若小车作加速度向右的减速运动，则小车加速度 a 与倾角 θ 应满足的关系为

（____）。

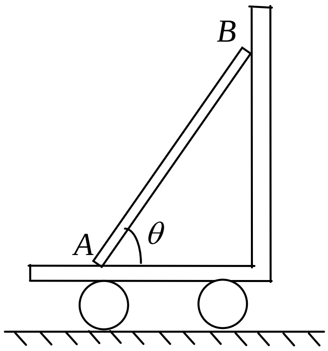


图 4

第 5 题（6 分）

如图 5 所示，细圆环管在相连部件（图中未画出）带动下沿水平直线轨道纯滚动，管内有一小壁虎，相对于环管爬行，壁虎可被视为一点，在图中以小球 B 代替。图示瞬时，壁虎与环管的中心处于同一水平线上，壁虎相对环管的速率为 u，相对速度的方向朝下，相对速度大小的改变率等于 0，环管中心 O 点的速度向右，速度大小也为 u，加速度为 0。环管的中心半径等于 R。则在此瞬时

(1)、（2 分）壁虎相对地面的速度大小为（____________________）；

(2)、（2 分）壁虎相对地面的加速度大小为（_____________________）；

(3)、（2 分）壁虎在相对地面的运动轨迹上所处位置点的曲率半径为（_______________）。

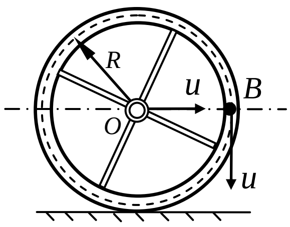


图 5

第 6 题（5 分）

图 6 所示结构中，铅垂杆①和斜杆②均为弹性杆，斜杆②与水平线之间的夹角为 θ，直角三角形 ABC_2 为刚体，边 BC_2 处于水平位置。已知 a、δ 和 θ，现将 C_1 和 C_2 联结在一起，则求该两杆轴力用到的平衡方程和变形协调方程：

(1)、（2 分）平衡方程（杆①、杆②的轴力分别用 F_{N1} 和 F_{N2} 表示）为（_______________________）；

(2)、（3 分）变形协调方程（杆①、杆②的变形分别用 Δl_1 和 Δl_2 表示）为（____________________）。

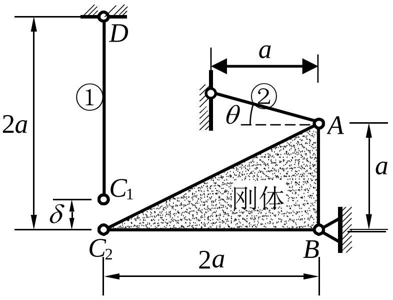


图 6

第 7 题（5 分）

一种能量收集装置，可简化为图 7 所示悬臂梁模型。梁 *AB* 长 *l*，弯曲刚度为 2*EI*；梁 *BC*、*BD* 长均为 *l*，弯曲刚度均为 *EI*。梁 *AB* 与梁 *BC*、*BD* 通过刚节点 *B* 连接，三梁均处于水平位置。梁和刚节点 *B* 的重量均不计。梁 *BC*、*BD* 端部均固定有重量为 *W* 的物块，该两梁之间有小间隙。则梁端 *D* 的挠度与物块重量之比 f_D/W=（_________________） 。

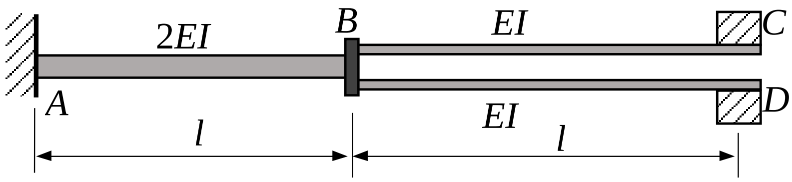


图 7

第 8 题（6 分）

已知一危险点的单元体处于平面应力状态，最大切应变 $\gamma_{\max}=5\times10^{-4}$，通过该点相互垂直的微截面上正应力之和为 28MPa。若材料的弹性模量 $E=200\,\text{GPa}$，泊松比 $\nu=0.25$。则

(1)、（3 分）该点主应力分别为 $\sigma_1=$（______）MPa，$\sigma_2=$（______）MPa，$\sigma_3=$（______）MPa ；

(2)、（3 分）用最大切应力强度理论校核时的相当应力为 $\sigma_{r3}=$（_______）MPa 。

第 9 题（6 分）

图 8 所示刚架中，水平梁为刚杆，竖直杆①、②均为细长弹性杆，只考虑与纸面平行的平面内的失稳。则

(1)、（2 分）刚架失稳时载荷的最小值 *F* 由杆（_______）决定；[注：填入①，②]

(2)、（4 分）刚架失稳时载荷的最小值 *F*=（_______________）。

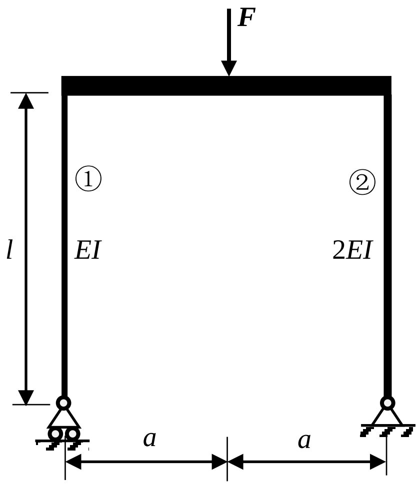


图 8

第 10 题（8 分）

图 9 所示等截面直角刚架 ACB，杆件横截面为圆形，弯曲刚度为 EI，扭转刚度为 $0.8EI$。C 处承受大小为 m、方向如图所示的外力偶，该力偶矢量与刚架轴线处于同一平面内。则

(1)、（4 分）截面 A 的弯矩 M=（________________）；

(2)、（4 分）截面 B 的扭矩 T=（________________）。

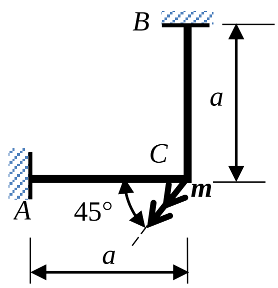


图 9

第二部分 提高题部分（计算题，共60分）

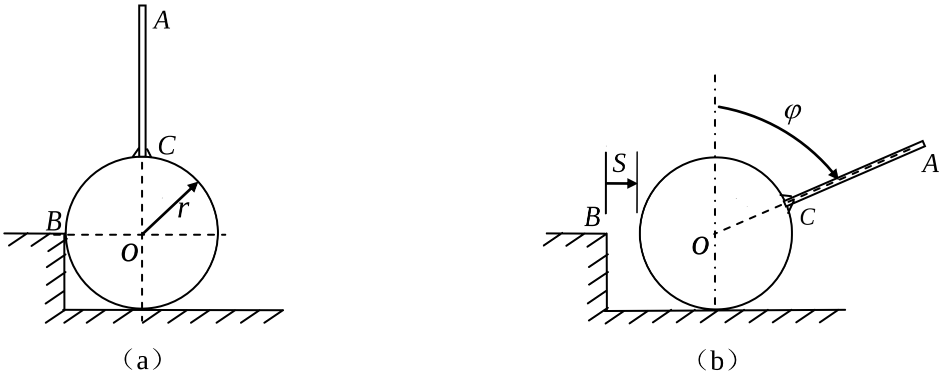
第11题（共15分）

如图10(a)所示，圆轮和细直杆AC质量均为m，固结成一组合刚体，其中，杆AC沿圆轮径向，O为圆轮轮心，C点为轮与杆的固结点，也是组合刚体的质心。初始时刻，组合刚体静止于水平地面，左边紧靠高度为r的水平台阶，然后，受微小扰动后向右倾倒，以φ表示组合刚体在杆端A与地面接触之前的转动角度（参见图10(b)）。圆轮均质，半径为r，组合刚体关于过轮心O并垂直于圆轮的轴之转动惯量为J_o。略去各处摩擦，试分析组合刚体由初始位置至A端与地面接触之前的动力学过程，并求

(1)、（5 分）圆轮与台阶 B 点开始分离时的角度 φ 的大小；

(2)、（6 分）组合刚体的角速度与角度 φ 的关系；

(3)、（4 分）圆轮右移的距离 S 与角度 φ 的关系。



（a） （b）

图 10

第12题（共15分）

如图11所示，边长为h、质量为m的均质正方形刚性平板静置于水平面上，且仅在角点A、C和棱边中点B处与水平面保持三点接触。位于水平面上的小球以平行于AC棱边的水平速度v_b与平板发生完全弹性碰撞，碰撞点至角点A的距离以b表示。已知平板关于过其中心的铅直轴的转动惯量为$J = mh^2/6$，在A、B和C三点处与水平支承面的静摩擦因数和动摩擦因数均为μ。略去碰撞过程中的摩擦力冲量。

(1)、（3分）试求碰撞结束瞬时平板的速度瞬心位置；

(2)、（3分）若$b = 5h/6$，试求碰撞结束瞬时平板的角加速度；

(3)、（9分）设小球的质量为$m/21$。碰撞后，平板在水平面内绕B点转动，试求碰撞点的位置b和碰撞前小球的速度v_b应满足的条件。

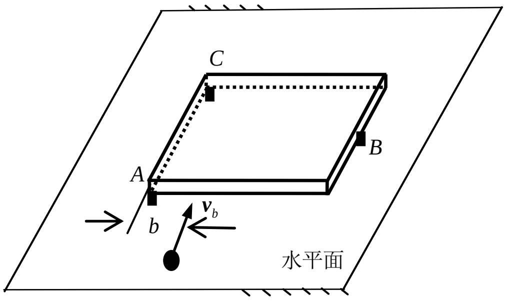


图 11

第13题（共15分）

图12所示的圆环杆，材料的弹性模量为E，受集度为m、矢量方向与环杆轴线相切的的均布力偶载荷，变形时杆件始终保持弹性状态，且横截面符合平面假设。圆环杆轴线半径为R，横截面（如图中**A-A**截面）为圆，其直径为$2r$，且$r/R \ll 1$。试求

(1)、（3分）横截面上的内力；

(2)、（10分）横截面的转角φ;

(3)、（2分）横截面上内力的最大值。

【提示】：当$X/Y \ll 1$时可做简化：$Y+X \approx Y$。

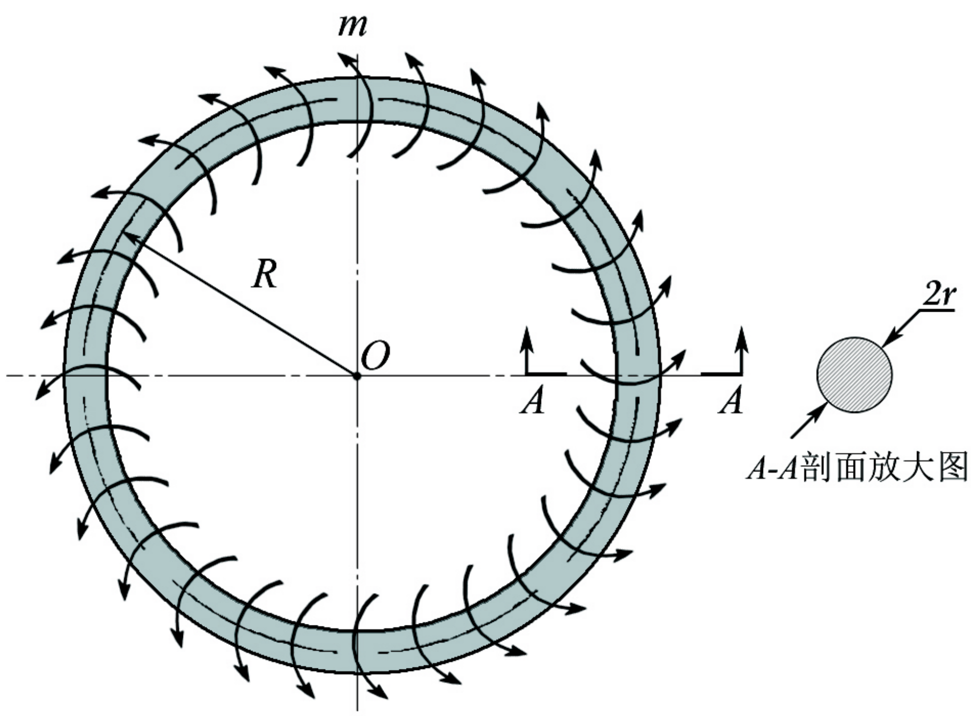


图 12

第14题（共15分）

如图13、14所示，薄壁圆环管压力容器壁厚为t，环管轴线半径为R，环管横截面平均直径为D。为了加固压力容器，用一根直径为d的细钢丝缠绕圆管，缠绕时拉紧，以至于钢丝与压力容器间的摩擦力达最大。缠绕的钢丝相邻两圈间相互紧挨，但可忽略其相互挤压作用。只考虑钢丝因长度方向拉伸引起的变形，即忽略钢丝的弯曲、扭转等变形。设$t/D \ll 1$，$D/R \ll 1$，且$d/D \ll 1$。钢丝材料的弹性模量为E_s，压力容器材料的弹性模量和泊松比分别为E和ν，钢丝与压力容器间的摩擦因数为μ。

(1) 已知：钢丝缠绕圈数的最大值 n 为偶数，当环管外表面缠满钢丝但两端尚未连接时，钢丝最大拉力为 P。环管外表面缠满钢丝后将钢丝两端互相连接(参见图 14)，并让钢丝缓慢松弛。求此时：

①（3 分）钢丝的伸长量 Δl_0；

②（2 分）钢丝的张力 F_0；

③（5 分）环管横截面上的应力 σ_l 及环管柱面形纵截面(参考图 15)上的应力 σ_v。

(2) （5 分）在(1)状态的基础上，压力容器施加内压，压强为 p。试写出关于钢丝张力增量 ΔF 、环管柱面形纵截面上应力增量 $\Delta\sigma_v$ 的联立方程组。

【提示】：做简化处理：$\cos(\pi/n)\approx 1$；若$X/Y \ll 1$，则$Y+X \approx Y$。

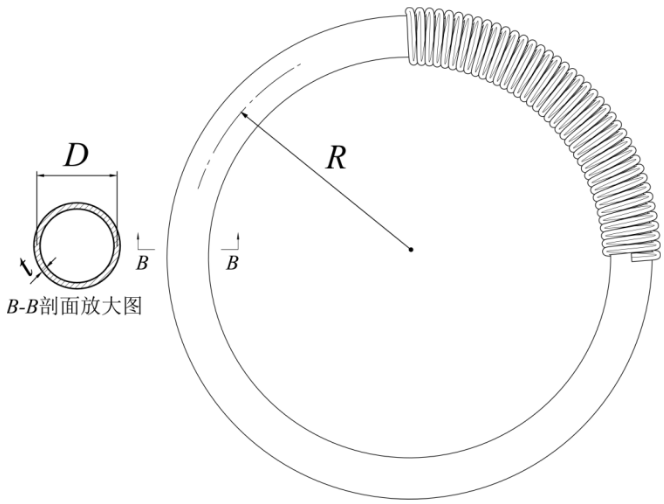


图 13

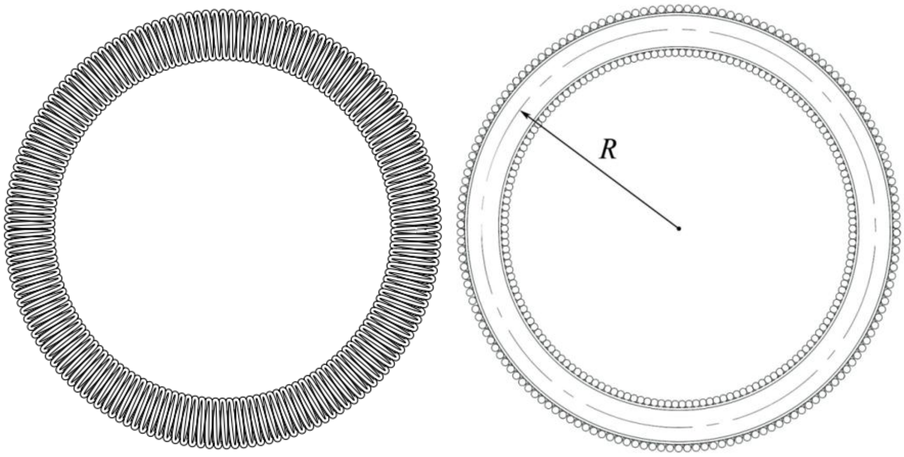


图 14

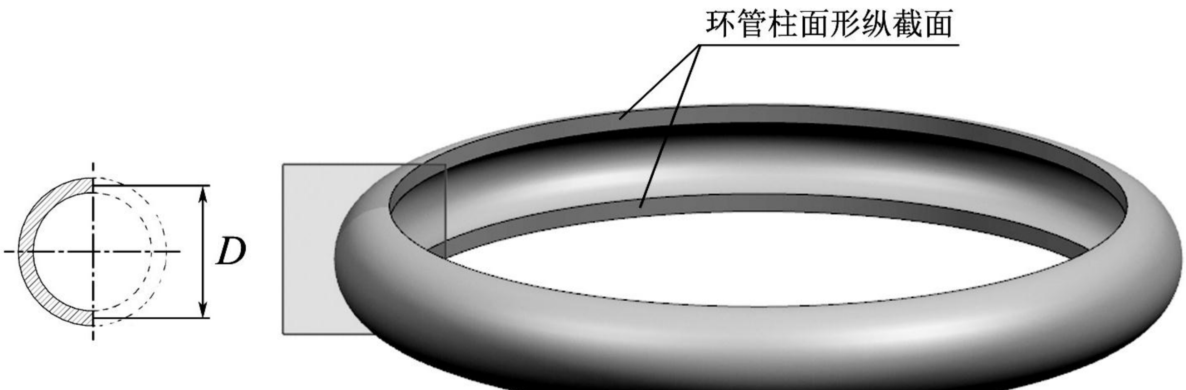


图 15

第十一届全国周培源大学生力学竞赛
（个人赛）试题

出题学校：**湖南大学**

（本试卷分为基础题和提高题两部分　　满分 120 分　　时间 3 小时 30 分）

第一部分 基础题部分（填空题，共60分）

第 1 题（6 分）

(1)、 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}F_a c-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}F_b c$；　(2)、 $F_b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}F_a$；　(3)、 $\left(\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}\right)Fc$ 。

第 2 题（6 分）

(1)、3；　(2)、$\dfrac{3}{8}gt^2$ 。

第 3 题（6 分）

(1)、F (受拉）或 F ；(2)、$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}F$ (受压）或$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}F$ 。

第 4 题（6 分）

(1)、$\tan^{-1}(\sqrt{3}/2)\le\theta<90^\circ$；

(2)、若 $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\le\theta<60^\circ$，则 $a\le g\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\cot\theta\right)$；若 $60^\circ\le\theta<90^\circ$，则 $a\le g\cot\theta$ 。

第 5 题（6 分）

(1)、$\sqrt{5}u$；　(2)、$4\dfrac{u^2}{R}$；(3)、$\dfrac{5\sqrt{5}}{8}R$ 。

第 6 题（5 分）

(1)、$2F_{\mathrm{N1}}-F_{\mathrm{N2}}\cos\theta=0$；

(2)、$\Delta l_1+2\Delta l_2/\cos\theta=\delta$ 。

第 7 题（5 分）

$\frac{8l^3}{3EI}$。

第 8 题（6 分）

(1)、54，0，-26；

(2)、80。

第 9 题（6 分）

(1)、①；　　(2)、$\frac{\pi^2 \boldsymbol{EI}}{2\boldsymbol{l}^2}$。

第 10 题（8 分）

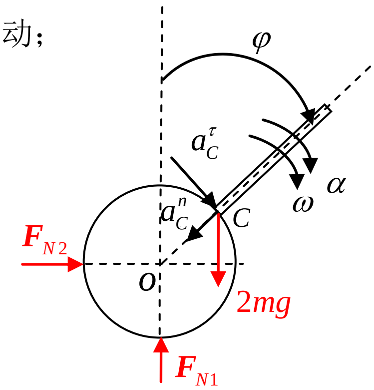
(1)、$\frac{2\sqrt{2}}{9}m$；　　　　(2)、$\frac{5\sqrt{2}}{18}m$或$-\frac{5\sqrt{2}}{18}m$。

第二部分 提高题部分（计算题，共60分）

第11题（共15分）

解答

组合刚体的运动存在两个阶段，一是绕 O 的定轴转动；
二是质心水平速度保持不变的平面运动。
首先确定由定轴转动到平面运动的临界转角。



问题（1）——

刚体绕 O 作定轴转动。依动能定理

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 = 2mgr(1-\cos\varphi)\cdots\cdots(1)$$ **（1 分）**

$$\omega^2 = \frac{4mgr}{J_O}(1-\cos\varphi)$$

式(1)两边对时间求导

$$\alpha = \frac{2mgr}{J_O}\sin\varphi\cdots\cdots(2)$$ **（1 分）**

式(2)也可由对点 O 的动量矩定理得到

由质心运动定理

$$F_{N2} = 2m\left(-a_C^n\sin\varphi + a_C^\tau\cos\varphi\right)\cdots\cdots(3)$$

$a_C^n = r\omega^2,\ a_C^\tau = r\alpha$ 。方程(3)也可由动静法得到。式(3)中代入加速度

$$F_{N2} = \frac{2mgr^2}{J_O}\sin\varphi\left(3\cos\varphi - 2\right)$$ **（2 分）**

球与凸台分离的角度由$F_{N2}=0$确定。

$$\varphi_0 = \cos^{-1}\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(4$$ **（1 分）**

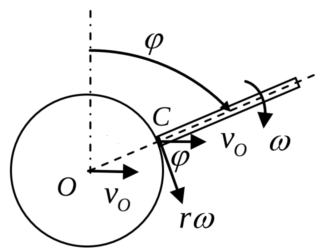
对应角速度$\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{mgr}{3J_O}}$

问题（2）——

当$\varphi \le \varphi_0$，$\omega = 2\sqrt{\dfrac{mgr}{J_O}(1-\cos\varphi)}$ **（1 分）**

当$\varphi > \varphi_0$时，组合刚体与台阶脱离接触，作平面运动，水平方向动量守恒，质心 C 的水平速度不变，为

$$v_{Cx0} = r\omega_0\cos\varphi_0 = \frac{4r}{3}\sqrt{\frac{mgr}{3J_O}}\ \cdots\cdots(5)$$



O 点速度 v_O 水平，由基点法得质心 C 的速度

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO}\cdots\cdots(6)$$ **（1 分）**

质心 C 的水平速度为

$$v_{Cx} = v_O + r\omega\cos\varphi = r\omega_0\cos\varphi_0 \quad \cdots\cdots(7)$$ **（1 分）**

依动能定理，有

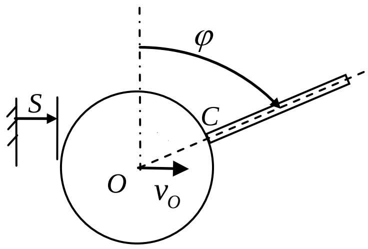
$$\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}\times 2m\times\left[(v_{Cx0})^2+(r\omega\sin\varphi)^2\right]=2mgr(1-\cos\varphi)\cdots\cdots(8)$$ （2 分）

其中， $J_C=J_O-2mr^2$

由式(8)解出

$$\omega=\sqrt{\frac{4mgr(1-\cos\varphi)-2mr^2\omega_0^2\cos^2\varphi_0}{J_O-2mr^2\cos^2\varphi}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9mgr(1-\cos\varphi)-2mr^2\omega_0^2}{J_O-2mr^2\cos^2\varphi}}\quad（当\varphi>\varphi_0）\cdots\cdots(9)$$

（1 分）



问题（3）——

当$\varphi\le\varphi_0$时　$S=0$　（1 分）

当$\varphi>\varphi_0$时，圆盘向右发生水平移动和转动。注意到

$$v_O=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}$$ （1 分）

由式(7)有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r\omega_0\cos\varphi_0}{\omega(\theta)}-r\cos\theta$$ （1 分）

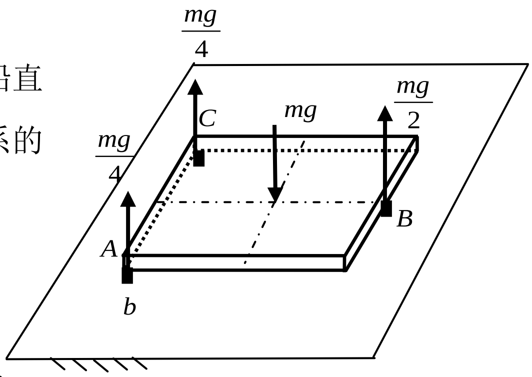
积分上式，并注意到$\sin\varphi_0=\frac{\sqrt{5}}{3}$，得

$$S=r\omega_0\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{J_O-2mr^2\cos^2\theta}{9mgr(1-\cos\theta)-2mr^2\omega_0^2}}\mathrm{d}\theta-r\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\quad(\varphi>\varphi_0)$$ （1 分）

其中， $\omega_0=2\sqrt{\frac{mgr}{3J_O}}$ ，$\varphi_0=\cos^{-1}\frac{2}{3}$。

第12题（共15分）

解答

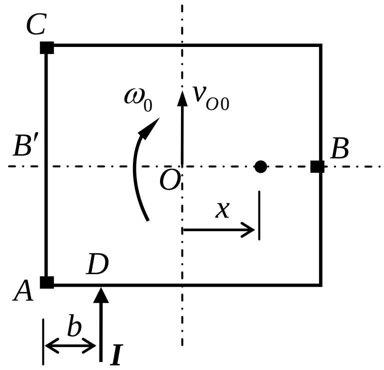


两物体碰撞及速度突变都发生在水平面内，在铅直方向，方板仍然处于平衡状态。由空间平行力系的平衡知三个支撑点的铅直方向反力。

支承面对方板的水平约束力就是动或静摩擦力，由摩擦定律知摩擦力与铅直反力成比例。

因此，在碰撞阶段，水平摩擦力的冲量略去不计。

问题（1）——



记碰撞冲量为 I，考察板

$$\begin{cases} mv_{O0} = I \\ J_O\omega_0 = I\left(\dfrac{h}{2} - b\right) \end{cases} \cdots\cdots(1)$$ **（1 分）**

$J_O = \dfrac{1}{6}mh^2$，由(1)解出

$$v_{O0} = \frac{I}{m}; \quad \omega_0 = \frac{6I}{mh^2}\left(\frac{h}{2} - b\right)$$

碰撞结束瞬时，板作平面运动的速度瞬心位于通过点 B'和点 B 的直线上。

由 $v_{O0} - x\omega_0 = 0$ **（1 分）**

得

$$x = \frac{h}{6(1/2 - b/h)} \qquad (b \neq \frac{h}{2}) \quad \cdots\cdots(2$$ **（1 分）**

当$b = h/2$时，板作平移，速度瞬心在无穷远处。

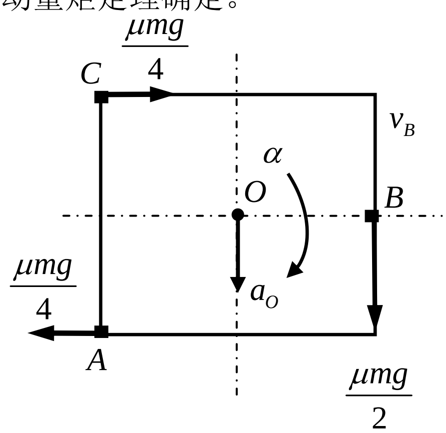
式中，x 坐标的原点在点 O，向右为正，向左为负。

问题（2）——

将 b=5h/6 代入式(2)，有 x = -h/2，板逆时针转动。此时，板的速度瞬心在 AC 棱边中点。碰撞结束瞬时，板的角加速度由相对于质心的动量矩定理确定。

$J_O\alpha = M_O$ **（1 分）**

板在水平面内受三个滑动摩擦力作用，如右图所示。



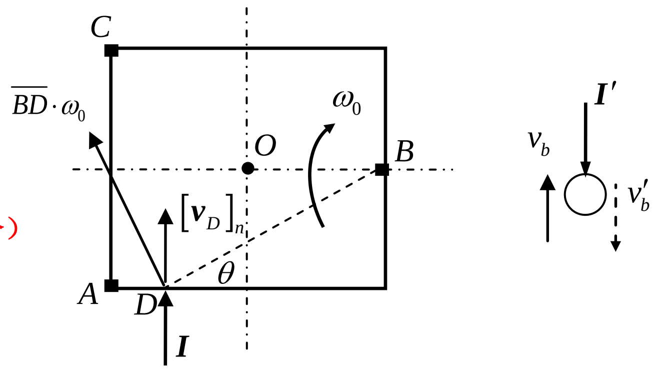
$M_O = \dfrac{\mu mgh}{2}$ **（1 分）**

代入式(3)，有 $\alpha = \dfrac{3\mu g}{h}$ (顺时针) **（1 分）**

问题（3）——

B 点速度 v_B=0，由式(2)知

$b=\dfrac{h}{6}$ （1 分）



由对 B 点的动量矩守恒得到

$$\frac{m}{21}v_b\cdot\frac{5}{6}h=J_B\omega_0-\frac{m}{21}v_b'\cdot\frac{5}{6}h\cdots\cdots(3)$$ （1 分）

其中，v_b' 为小球的反弹速度，

$$J_B=J_O+\frac{m}{4}h^2=\frac{5}{12}mh^2。$$

碰撞点 D 的法向速度为

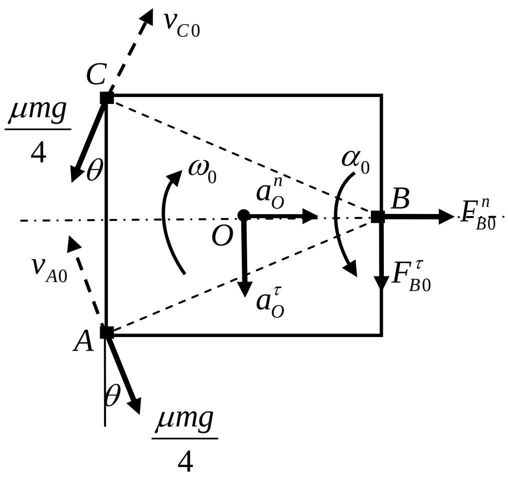
$$[v_D]_n=\overline{BD}\cdot\omega_0\cdot\cos\theta=\frac{5}{6}\ h\omega_0$$

完全弹性碰撞条件为

$$v_b'+[v_D]_n=v_b\cdots\cdots(4)$$ （1 分）

结合式(3)与（4），解出

$$\omega_0=\frac{3v_b}{17h}$$ （1 分）



B 点的静摩擦力满足

$$\sqrt{\left(F_{B0}^n\right)^2+\left(F_{B0}^\tau\right)^2}\le\frac{\mu mg}{2}\cdots\cdots(5)$$ （2 分）

由质心运动定理和对 B 点的动量矩定理

$$\begin{cases} ma_{O0}^n=F_{B0}^n \\ ma_{O0}^\tau=\dfrac{\mu mg\sqrt{5}}{5}+F_{B0}^\tau \\ J_B\alpha_0=M_B=\dfrac{\mu mgh\sqrt{5}}{4} \end{cases}\cdots\cdots(6)$$ （1 分）

其中，$a_{O0}^n=\dfrac{h}{2}\omega_0^2$，$a_{O0}^\tau=\dfrac{h}{2}\alpha_0$

由式(6)解出 $\alpha_0=\dfrac{3\sqrt{5}\mu g}{5h}$，$a_{O0}^\tau=\dfrac{3\sqrt{5}\mu g}{10}$，$F_{B0}^\tau=\dfrac{\sqrt{5}\mu mg}{10}$，$F_{B0}^n=\dfrac{1}{2}mh\omega_0^2$

再由式(5)，得到 $v_b\le\dfrac{34}{3}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}\mu gh}{10}}$ （1 分）

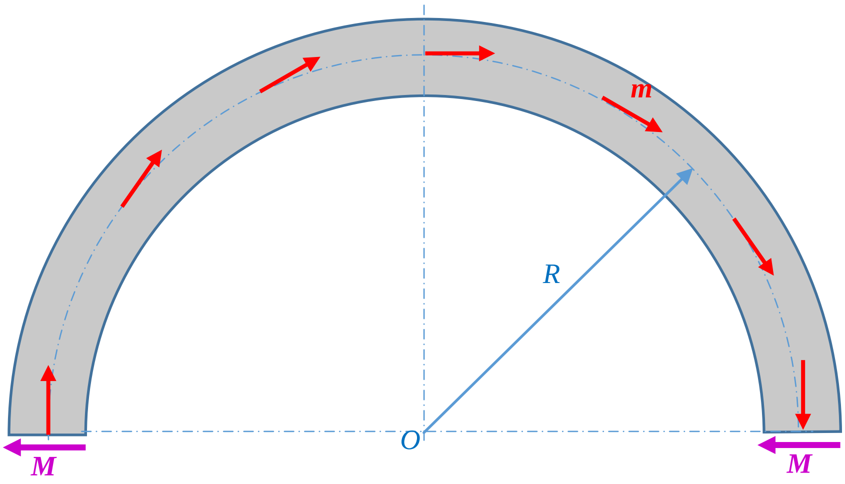
此后，板作减速转动，$\omega<\omega_0$， $a_O^n<\dfrac{h}{2}\omega_0^2$， $\therefore F_B^n<F_{B0}^n$。

可见，板在停止转动之前，其 B 端能保持静止不动。（1 分）

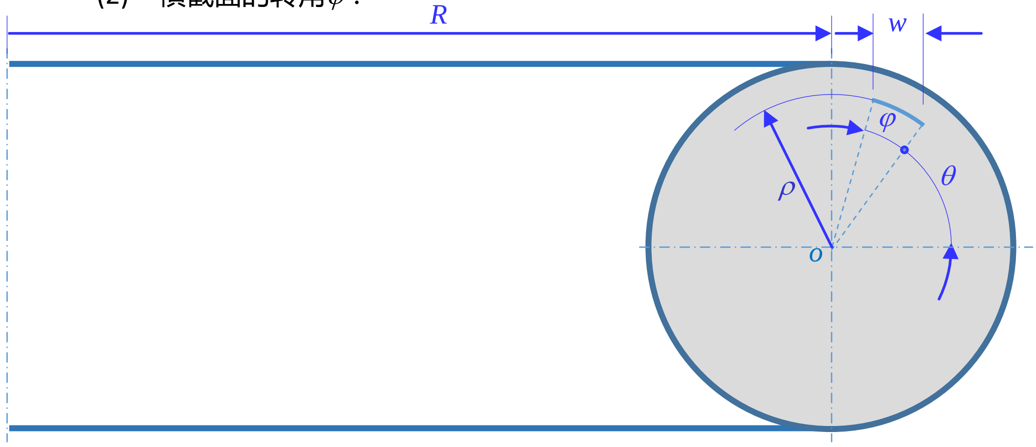
第13题（共15分）

解: (1) 横截面上的内力:

弯矩：$M=mR$ **(3 分)**



(2) 横截面的转角φ：



通过(ρ，θ)点的圆周线正应变ε(这里，正应变以缩短为正)为

$$\varepsilon=\frac{w}{R+\rho\cos\theta}=\frac{\rho[\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)]}{R+\rho\cos\theta}$$ **(5分)**

$$\varepsilon\approx\frac{\rho}{R}[\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)]$$ **(1分)**

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{\rho}{R}[\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)]$$ **(1分)**

$$M=\int_A\rho\sin(\theta+\varphi)\sigma\mathrm{d}A$$ **(1分)**

计算出积分，可得

$$M=\frac{Er^4}{4R}\pi\sin\varphi$$ **(1分)**

于是转角为

$$\varphi=\sin^{-1}\left(\frac{E\pi r^4}{4RM}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{E\pi r^4}{4mR^2}\right)$$ **(1分)**

(3) 内力的最大值$M_{\max}$

当$\varphi=\pi/2$ 时，$M=M_{\max}$。 **(1分)**

$$M_{\max}=\frac{\pi Er^4}{4R}$$ **(1分)**

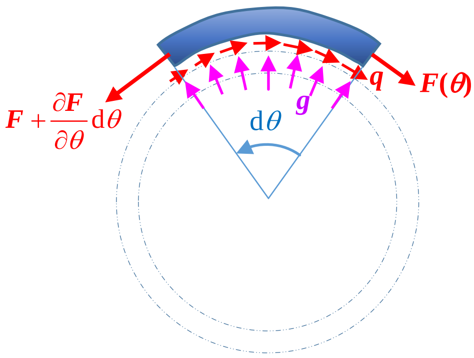
第14题（共15分）

解：(1)

记 $D' = D + t$

①钢丝的伸长量

由力的平衡可得



$$\begin{cases} g \cdot \dfrac{D'}{2} = F \\ \dfrac{qD'}{2} = \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ q = \mu g \\ F\Big|_{\theta = 2n\pi} = P \end{cases} \qquad (1)$$

解此方程，得

$$F(\theta) = Pe^{\mu(\theta - 2n\pi)} \qquad （2） \qquad \textbf{(2 分)}$$

钢丝绕满环管表面后，两端即将连接时，钢丝伸长量：

$$\Delta l_0 = \frac{1}{E_S A}\int_0^{2n\pi} F(\theta)\frac{D'}{2}\mathrm{d}\theta$$

即

$$\Delta l_0 = \frac{DP}{2E_S A\mu}(1 - e^{-2n\pi\mu}) \qquad \textbf{(1 分)}$$

②钢丝的张力

两端连接的钢丝松弛后，

$$\Delta l_0 = \frac{F_0 n\pi D'}{E_S A} \qquad \textbf{(1 分)}$$

由此得钢丝的张力

$$F_0 = \frac{P}{2\mu n\pi}(1 - e^{-2n\pi\mu}) \qquad \textbf{(1 分)}$$

③环管的应力

求管道横截面上的应力 σ_l：

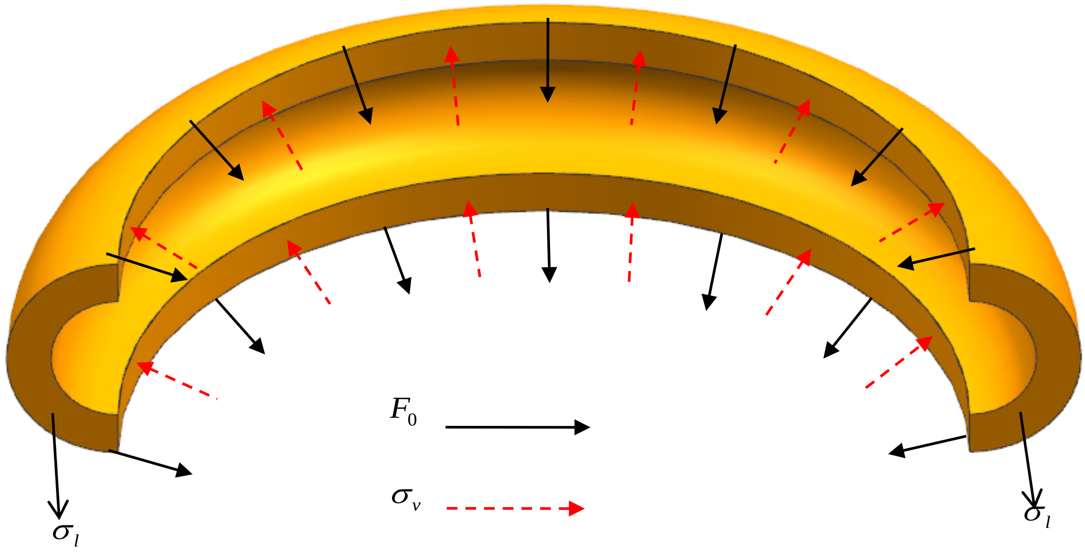
$$\sigma_l = 0 \qquad （a） \qquad \textbf{(1 分)}$$

求环管柱面形纵截面上的应力 σ_v：先用一个竖直平面沿管道环线的直径切开，再用过管道轴线的竖直圆柱面将管道切成两半，可知

$$\sum_{j=1}^{n/2} F_0 \sin\theta_j - \sigma_v \cdot 2R \cdot 2t + 2\frac{\pi D}{2}t\sigma_l = 0 \qquad (b) \qquad \textbf{(2 分)}$$

其中 $\alpha = 2\pi/n$，$\theta_j = (j - 1/2)\alpha$ 。计算出和式，得

$$2\frac{F_0}{d'}R - 4\sigma_v Rt + \pi Dt\sigma_l = 0 \qquad (c) \qquad \textbf{(1 分)}$$



式中，d' 计算如下 $d'=\dfrac{d}{1-\dfrac{D+t+d}{2R}}\approx\dfrac{d}{1-\dfrac{D}{2R}}$

于是

$$\sigma_v=\frac{F_0}{2td'}$$

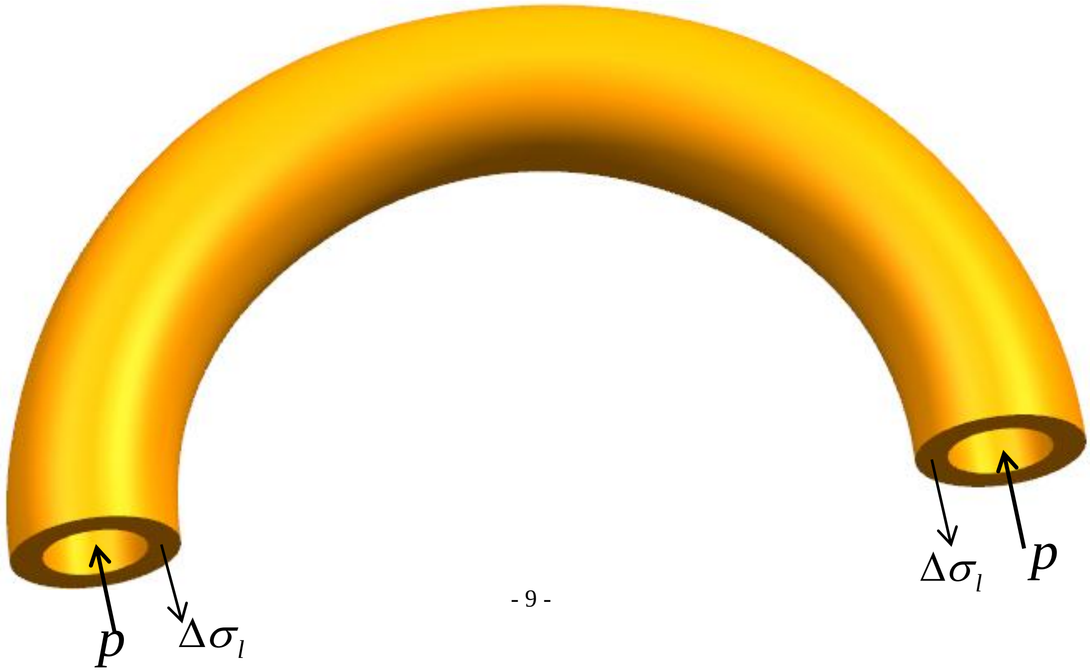
即

$$\sigma_v=\frac{P}{4n\pi\mu td}\left(1-e^{-2n\pi\mu}\right)$$ **(1 分)**

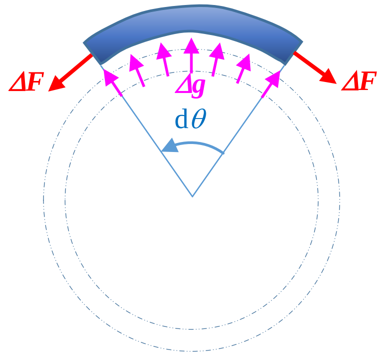
(2)当有内压 p 时，记由于施加 p 而引起的竖直纵截面上的应力增量为 $\Delta\sigma_v$ (压为正)，钢丝与管外表面间的挤压引起管外表面上压应力增量为 $\Delta\sigma_g$ (压为正)，钢丝拉力增量为 ΔF (拉为正)，管横截面应力增量为 $\Delta\sigma_l$ (拉为正)。

求环管道横截面上的应力增量 $\Delta\sigma_l$：用一个竖直平面沿管道环线的直径将压力容器切开成相等的两半，可知代替方程(a)的是

$$\Delta\sigma_l=\frac{Dp}{4t} \qquad \text{(a}'\text{)}$$



求环管柱面形纵截面上的应力σ_v：由变形协调方程得



$$d \cdot \frac{4\Delta F}{E_s \pi d^2} = \frac{1}{E}[-d \cdot \Delta\sigma_v - \nu(d \cdot \Delta\sigma_l - \Delta g)] \quad (3)$$ **(2 分)**

参考式(1)的第一式，有

$$\Delta g \cdot \frac{D'}{2} = \Delta F$$ 。 **(1 分)**

将上述结果代入式(3)， 化简得

$$\left(\frac{4}{E_s \pi d^2} - \frac{2\nu}{EDd}\right)\Delta F + \frac{1}{E}\Delta\sigma_v = -\frac{\nu D}{4Et}p \quad (3')$$

在有 p 存在的情况下，仿照式(c)可写出

$$2\frac{R}{d'}\Delta F - 4Rt\Delta\sigma_v + \pi Dt\Delta\sigma_l = \left[2R(D-t) + \frac{\pi}{4}(D-t)^2\right]p$$ **(1 分)**

式(a')代入上式，化简得

$$\frac{\Delta F}{d} - 2t\Delta\sigma_v = Dp \quad (c')$$ **(1 分)**

式(3′)、(c')联立可解得 ΔF、$\Delta\sigma_v$。